Έστω $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ μια κυκλική ομάδα τάξης n

Για κάθε διαιρέτη $d|n$, υπάρχει μοναδική υποομάδα H της G με τάξη d: $H = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$

ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΤΟΥ $n=\|G\|$	ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ ΤΗΣ G	ΤΑΞΗ ΥΠΟΟΜΑΔΑΣ
d_1	$H_1 = \langle a^{n/d_1} \rangle$	d_1
d_2	$H_2 = \langle a^{n/d_2} \rangle$	d_2
$\vdots$	$\vdots$	
$d_{\tau(n)}$	$H_{\tau(n)} = \langle a^{n/d_{\tau(n)}} \rangle$	$d_{\tau(n)}$

Επίσης αν d_i, d_j διαιρέτες του n, τότε:

$$H_i \subset H_j \Leftrightarrow d_i | d_j$$

Παραδείγματα: 1) $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ κυκλική ομάδα τάξης 6

Διαιρέτες του 6: 1, 2, 3, 6

Υποομάδες της G: $H_1 = \langle a^{\frac{6}{1}} \rangle = \langle a^6 \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$ τάξης 1

$H_2 = \langle a^{\frac{6}{2}} \rangle = \langle a^3 \rangle$ τάξης 2

$H_3 = \langle a^{\frac{6}{3}} \rangle = \langle a^2 \rangle$ τάξης 3

$H_6 = \langle a^{\frac{6}{6}} \rangle = \langle a \rangle = G$ τάξης 6.

2) Εστω η κυκλική ομάδα $Z_{18} = \langle [1]_{18} \rangle$ κυκλική τάξης 18.

Διαιρετες του 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

$H_i = \langle a^{n/d} \rangle$ πολλ/κος

$H_i = \langle \frac{n}{d} a \rangle$ προσθετ

1 $H_1 = \langle \frac{18}{1}[1]_{18} \rangle = \langle 18[1]_{18} \rangle = \langle [18]_{18} \rangle = \langle [0]_{18} \rangle$ τάξης 1

2 $H_2 = \langle \frac{18}{2}[1]_{18} \rangle = \langle 9[1]_{18} \rangle = \langle [9]_{18} \rangle$ τάξης 2

3 $H_3 = \langle \frac{18}{3}[1]_{18} \rangle = \langle 6[1]_{18} \rangle = \langle [6]_{18} \rangle$ τάξης 3

6 $H_6 = \langle \frac{18}{6}[1]_{18} \rangle = \langle 3[1]_{18} \rangle = \langle [3]_{18} \rangle$ τάξης 6

9 $H_9 = \langle \frac{18}{9}[1]_{18} \rangle = \langle 2[1]_{18} \rangle = \langle [2]_{18} \rangle$ τάξης 9

18 $H_{18} = \langle \frac{18}{18}[1]_{18} \rangle = \langle [1]_{18} \rangle = \mathbb{Z}_{18}$ τάξης 18

Ισομορφισμοί Ομάδων

Έστω $(G_1, \cdot)$ και $(G_2, \cdot)$ δύο ομάδες.

Ορισμός Μια απεικόνιση $f: G_1 \to G_2$ καλείται ισομορφισμός ομάδων $\Leftrightarrow$ α) Η f είναι 1-1 & επί

β) $\forall x, y \in G_1: f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Η f καλείται ομομορφισμός ομάδων $\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in G_1 \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Βασικές Ιδιότητες

1) $f(e_1) = e_2$, $\begin{pmatrix} e_1 \text{ ουδέτερο στοιχείο της } G_1 \\ e_2 \text{ ουδέτερο } \text{-//- } \text{ της } G_2 \end{pmatrix}$

2) $\forall x \in G_1$ $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Απόδειξη:

1) $f(e_1) = f(e_1 e_1) = f(e_1) f(e_1) \Rightarrow$

$e_2 f(e_1) = f(e_1) f(e_1) \Rightarrow$ από το νόμο διαγραφής

στη G_2: $f(e_1) = e_2$

2) $\forall x \in G_1$: $x x^{-1} = e_1 = x^{-1} x \Rightarrow$

$f(x x^{-1}) = f(e_1) = f(x^{-1} x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) f(x^{-1}) \overset{(1)}{=} e_2 = f(x^{-1}) f(x) \Rightarrow$

$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Πρόταση 1) Αν $f: G_1 \to G_2$ και $g: G_2 \to G_3$ είναι ισομορφισμοί ομάδων, τότε η απεικόνιση:

$g \circ f: G_1 \to G_3$ είναι ισομορφισμός ομάδων

2) Για κάθε ομάδα G, η ταυτοτική απεικόνιση

$Id_G: G \to G$, $Id_G(x) = x$ είναι ισομορφισμός ομάδας

3) Αν $f: G_1 \to G_2$ είναι ισομορφισμός ομάδων, τότε η αντίστροφη της $f^{-1}: G_2 \to G_1$ είναι ισομορφισμός ομάδας.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Δύο γράφοι G_1 και G_2 καλούνται ισόμορφοι $\Leftrightarrow$ υπάρχει ισομορφισμός γράφων $f: G_1 \to G_2$, και τότε θα γράφουμε $G_1 \cong G_2$.

Πρόταση Η σχέση ισομορφισμού στην κλάση $\underline{Gr}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας

Απόδειξη Ανακλαστική $G \cong G$, είναι $Id_G: G \to G$ είναι ισομορφισμός ομάδων

Συμμετρική Έστω $G_1 \cong G_2$ τότε υπάρχει ισομορφισμός $f: G_1 \to G_2$

Επειδή η $f^{-1}: G_2 \to G_1$ είναι ισομορφισμός, έπεται ότι: $G_2 \cong G_1$

Μεταβατική $G_1 \cong G_2 \Rightarrow$ υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $f: G_1 \to G_2$

$G_2 \cong G_3 \Rightarrow$ υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $g: G_2 \to G_3$

Τότε η $g \circ f: G_1 \to G_3$ είναι ισομορφισμός ομάδων $\Rightarrow G_1 \cong G_3$.

• Βασικό Πρόβλημα Θεωρίας Ομάδων:
Περιγραφή των κλάσεων ισομορφίας όλων των ομάδων!

<u>Παράδειγμα</u> 1) $(\mathbb{Z}_2,+)\cong(U_2=\{1,-1\},\cdot)\cong$

$\cong(\{\underbrace{I_n}_{\text{η μοναδιαία του πίνακα}},-I_n\},\cdot)\cong(S_2,\cdot)\cong(\{e,a\},*)$

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

2) Αν $f: G_1\to G_2$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων, τότε $\forall x\in G_1$ $o(x)=o(f(x))$

• Έστω $o(x)=n<\infty \Rightarrow x^n=e_1 \Rightarrow f(x^n)=f(e_1)=e_2$
$\Rightarrow f(\underbrace{x\cdots x}_{n\text{-όροι}})=e_2 \Rightarrow \underbrace{f(x)\cdots f(x)}_{n\text{-όροι}}=e \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)^n=e_2\Rightarrow o(f(x))<\infty$ και μάλιστα
$o(f(x))|n$. Έστω $m=o(f(x))$ τότε $f(x)^m=e_2\Rightarrow$
$f(x^m)=e_2=f(e_1)\overset{f\ 1-1}{\Rightarrow} x^m=e_1\Rightarrow n=o(x)|m$
Άρα $n|m$ και $m|n\Rightarrow m=n$

• Έστω $o(x)=\infty$, τότε $o(f(x))=\infty$, διότι αν $o(f(x))=m<\infty$
$\Rightarrow$ τότε όπως και πριν θα είχαμε: $o(f^{-1}(f(x)))=m<\infty$
$\Rightarrow o(x)=m<\infty$ άτοπο. Άρα σε κάθε περίπτωση
$o(x)=o(f(x))$

• Οι ομάδες $V_4 = \{e, a, b, c\}$ (ομάδα του Klein)
$a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$

$Z_4 = \langle [1]_4 \rangle = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$ δεν είναι ισόμορφες, διότι κάθε στοιχείο στη V_4 εκτός του ουδετέρου, έχει τάξη 2, και στη Z_4 το $[1]_4$ έχει τάξη 4

Οι ομάδες Z_6 και S_3 δεν είναι ισόμορφες, διότι $o([1]_6) = 6$ και δεν υπάρχει στοιχείο τάξης 6 στην S_3. Διαφορετικά: Z_6: αβελιανή
S_3 δεν είναι αβελιανή

Αν G_1, G_2 ομάδες και $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_1$: αβελιανή $\Leftrightarrow$ G_2: αβελιανή. Αν $\underset{\text{είναι ισομορφισμός}}{f: G_1 \to G_2}$ και G_1 αβελιανή, έστω $a, b \in G_2$. Τότε: $a = f(x), b = f(y)$ και τότε:
$a \cdot b = f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y) = f(y \cdot x) = f(y) f(x) = b \cdot a$
$\Rightarrow a \cdot b = b \cdot a, \ \forall a, b \in G_2 \Rightarrow G_2$ αβελιανή

1) Οι ομάδες $(\mathbb{R},+)$ και $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ είναι ισόμορφες;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> ΟΧΙ, διότι $-1 \in \mathbb{C}^*$ και $o(-1)=2$, διότι $(-1)^2=1$. Αν $x \in \mathbb{R}$ $o(x)=2 \Rightarrow x \neq 0$ και $2x=0$ τότε $x=0$ ΑΤΟΠΟ

2) Οι ομάδες $(\mathbb{R},+)$ και $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ είναι ισόμορφες;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> Θεωρούμε την απεικόνιση

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x)=e^x$. Η f 1-1 και επί με αντίστροφη την $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_e x$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$: $f(x+y)=e^{x+y}=e^x e^y=f(x)f(y)$

Άρα η f ισομορφισμός $\Rightarrow (\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R}^+,\cdot)$

3) Είναι οι ομάδες $(\mathbb{R},+)$ και $(\mathbb{C},+)$ ισόμορφες;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> ΝΑΙ

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> 1) Αν $G=\langle a \rangle$ είναι μια κυκλική ομάδα άπειρης τάξης, τότε $G \cong (\mathbb{Z},+)$

2) Αν $G=\langle a \rangle$ είναι μια κυκλική ομάδα τάξης $n<\infty$, τότε $G \cong (\mathbb{Z}_n,+)$

3) Δύο κυκλικές ομάδες G_1 και G_2 είναι ισόμορφες $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |G_1|=|G_2|$

δηλ. $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow |G_1|=|G_2|$

Απόδειξη: 1) Θεωρούμε την απεικόνιση $f: \mathbb{Z} \to G = \langle a \rangle$

$f(n) = a^n$ • Η f είναι επί, διότι $G = \langle a \rangle = \{a^n \in G \mid n \in \mathbb{Z}\}$

και άρα $\forall a^n \in G: f(n) = a^n$

• Η f είναι 1-1, διότι $f(n) = f(m) \Rightarrow a^n = a^m \Rightarrow$

$\Rightarrow$ → $n > m$: $a^{n-m} = e \Rightarrow o(a) < \infty$ Άτοπο

→ $m > n$: $a^{m-n} = e \Rightarrow o(a) < \infty$ Άτοπο

→ $m = n$

• $f(n+m) = a^{n+m} = a^n \cdot a^m = f(n) \cdot f(m)$

Άρα η f ισομορφισμός και άρα $G \cong (\mathbb{Z}, +)$

2) Ορίζουμε $f: \mathbb{Z}_n \to G$, $f([k]_n) = a^k$

Έστω $\boxed{[k]_n = [\lambda]_n} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} k \equiv \lambda \pmod n \Leftrightarrow n \mid k-\lambda \Leftrightarrow$

$\exists s \in \mathbb{Z}: k - \lambda = n \cdot s$

$f([k]_n) = a^k$, $f([\lambda]_n) = a^\lambda$ και

$a^{k-\lambda} = a^{n \cdot s} = (a^n)^s = e^s = e \Rightarrow a^k = a^\lambda$

$\Rightarrow \boxed{f([k]_n) = f([\lambda]_n)}$ (2) $(1) \Rightarrow (2)$

$o(a) = n \Rightarrow G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$

Προφανώς η f επί, διότι $\forall a^k \in G$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$f([k]_n) = a^k$

Επειδή $|G| = n = |\mathbb{Z}_n|$ και η $f: \mathbb{Z}_n \to G$ είναι επί $\Rightarrow$

f: 1-1

$f([\kappa]_n + [\lambda]_n) = f([\kappa+\lambda]_n) = a^{\kappa+\lambda} = a^{\kappa} a^{\lambda} =$
$= f([\kappa]_n)\, f([\lambda]_n)$

Άρα η f ισομορφισμός ομάδων και $G \cong (\mathbb{Z}_n, +)$

3) "$\Leftarrow$" Αν $G_1 \cong G_2$, τότε υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $f: G_1 \to G_2$ τότε $|G_1| = |G_2|$, διότι η f 1-1 και επί

"$\Rightarrow$" Έστω $|G_1| = |G_2|$

α) Αν $|G_1| = \infty$, τότε $|G_2| = \infty$ και τότε από το (1) $\Rightarrow$
$\Rightarrow G_1 \cong (\mathbb{Z}, +)$ και $G_2 \cong (\mathbb{Z}, +)$
Τότε προφανώς $G_1 \cong G_2$
[αν $G_1 = \langle a \rangle$, $G_2 = \langle b \rangle$, τότε $f(a^{\kappa}) = b^{\kappa}$, $\forall \kappa \in \mathbb{Z}$]

β) Αν $|G_1| = n < \infty$ τότε και $|G_2| = n$ και τότε από (1)
$\Rightarrow G_1 \cong (\mathbb{Z}_n, +)$ και $G_2 \cong (\mathbb{Z}_n, +)$ και άρα $G_1 \cong G_2$

ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΜΟΡΦΙΑΣ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \ldots, \mathbb{Z}_n$
(Ανά δύο αυτές οι ομάδες είναι μη ισόμορφες)